10/10/2016

Στο προηγούμενο μάθημα είχαμε αποδείξει ότι

$$\sup A = a$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} a \text{ άνω φράγμα του } A \\ \forall\, \varepsilon>0 \quad \exists\, x\in A \quad \text{με } x>a-\varepsilon \end{cases}$$

Έστω $A\subseteq \mathbb{R}$, $L\in\mathbb{R}$ ΤΑΕΙ

Το (i) $\inf A = L$

(ii) α) Ο L είναι κάτω φράγμα του A

β) $\forall\, \varepsilon>0$ $\exists\, x\in A$ με $x<L+\varepsilon$

Απόδειξη σαν άσκηση για το σπίτι

<u>Άσκηση</u>

Έστω A, B δυο μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $A\subseteq B$ και B φραγμένο

Ερ. Να διαταχθούν οι αριθμοί $\inf A$, $\sup A$, $\inf B$, $\sup B$

Παρατήρηση

Αν Γ τυχαίο μη κενό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.
↳ (για να μιλήσουμε για $\sup\Gamma$ και $\inf\Gamma$)

Ισχύει $\inf\Gamma \le \sup\Gamma$

Πράγματι, αν $x\in\Gamma$ τυχαία
τότε $x \le \sup\Gamma$ (εφόσον $\sup\Gamma$ είναι ένα άνω φράγμα του Γ)
και $\inf\Gamma \le x$ (εφόσον το $\inf\Gamma$ είναι κάτω φράγμα του Γ)

Άρα $\inf\Gamma \le \sup\Gamma$

Επιστροφή στην άσκηση.

Για κάθε $x\in A$ ισχύει $x\in B$ και άρα $x \le \sup B$

άρα ο αριθμός $\sup B$ είναι άνω φράγμα του συνόλου A. Συνεπώς $\sup A \le \sup B$

Για κάθε $x\in A$ ισχύει $x\in B$ και άρα $\inf B \le x$
άρα ο αριθμός $\inf B$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου A. Συνεπώς $\inf B \le \inf A$

Έχουμε αποδείξει ότι $\inf B \le \underbrace{\inf A \le \sup A}_{\text{ισχύει για κάθε σύνολο}} \le \sup B$

<u>Ορισμός</u> : Ενα $A \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται επαγωγικό αν

(i) $1 \in A$

(ii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αν $x \in A$ τότε $x+1 \in A$

<u>Παραδείγματα</u>

→ Το ίδιο το $\mathbb{R}$

→ $(0, +\infty)$

→ $[1, +\infty)$

<u>Πρόταση</u>

Η τομή επαγωγικών συνόλων είναι επαγωγικό σύνολο (δεν αφορά μόνο δύο σύνολα αλλά και μια οικογένεια επαγωγικών συνόλων)

<u>Ορισμός</u> : Ονομάζουμε σύνολο των φυσικών αριθμών και συμβολίζουμε με $\mathbb{N}$ την τομή όλων των επαγωγικών συνόλων του $\mathbb{R}$

$$\mathbb{N} = \{ 1, \underset{\overset{\shortparallel}{2}}{1+1}, \underset{\overset{\shortparallel}{3}}{1+1+1}, \dots \}$$

Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής

Έστω P μια ιδιότητα που αφορά πραγματικούς (ή φυσικούς) αριθμούς
ώστε να ισχύει το εξής:

(i) Η P(1) ισχύει

(ii) Αν ισχύει η P(x) τότε ισχύει η P(x+1)

Τότε η P(x) ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό x.

Η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής χρησιμοποιείται σε δυο κατευθύνσεις

→ ως μέθοδος απόδειξης

↳ αφορά φυσικούς και μόνο ↳ πρέπει να γνωρίζουμε από την αρχή ό,τι θα αποδείξουμε

→ ως μέθοδος ορισμού εννοιών

Όταν χρησιμοποιείται σε ορισμούς καλείται και αναδρομή

Παράδειγμα.

Ορισμός δύναμης

Για $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $a^1 = a$
$a^{n+1} = a^n \cdot a$

Έτσι έχει οριστεί το a^n για κάθε $n \in \mathbb{N}$

Συμπληρωματικά ορίζουμε $a^0 = 1$ για $a \neq 0$

Ορισμός του $n!$

Ορίζουμε $1! = 1$

$(n+1)! = n!(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Επιπλέον θέτουμε $0! = 1$

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 24$

$5! = 120$

$6! = 720$

Έστω $a_1, a_2, a_3, \ldots$ πραγματικοί αριθμοί

$$\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) + a_{n+1}$$

Π.χ. $\sum_{i=1}^{5} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$

Επίσης αντί για το γράμμα i μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε άλλο γράμμα

Π.χ. $\sum_{k=1}^{n} a_k \;\Big|\; \sum_{j=1}^{n} a_j$

$$\sum_{i=1}^{8} 6 = 8 \cdot 6$$

Χρήση επαγωγής σε αποδείξεις.

Για κάθε $\sum_{k=1}^{\nu} k = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$ (1)
$\nu \in \mathbb{N}$

$(1+2+\dots+\nu)$

1º Επαγωγικό Βήμα. (για $\nu=1$) (Δε το παραλείπουμε)

$\sum_{k=1}^{1} k = 1$ $\frac{1(1+1)}{2} = 1$

Άρα ισχύει για $\nu=1$.

Γενικό επαγωγικό βήμα

Υποθέτουμε ότι η (1) ισχύει για το ν
δηλ. ότι $\sum_{k=1}^{\nu} k = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$

Θα αποδείξουμε την (1) για το $\nu+1$

$$\sum_{k=1}^{\nu+1} k = \left(\sum_{k=1}^{\nu} k\right) + (\nu+1) \overset{\text{από επαγωγική υπόθεση}}{=} \frac{\nu(\nu+1)}{2} + (\nu+1) =$$

$$= (\nu+1)\left(\frac{\nu}{2}+1\right) = \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}$$ δηλ. η (1) ισχύει για $\nu+1$.

Επομένως από μαθηματική επαγωγή η (1) ισχύει
$\forall \nu \in \mathbb{N}$

2) Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\sum_{k=1}^{\nu} k^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{\nu} k^2 = (1^2+2^2+\dots+k^2)$$

Απόδειξη με επαγωγή

1ο Επαγωγικό Βήμα

Για $\nu=1$

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 \qquad \frac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

άρα για $\nu=1$ ισχύει.

Γενικό επαγωγικό βήμα.

Υποθέτουμε ότι η (2) ισχύει για το ν και θα τη δείξουμε για το $\nu+1$

$$\sum_{k=1}^{\nu+1} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{\nu} k^2\right) + (\nu+1)^2$$

$$\overset{\text{επαγ. υποθ.}}{=} \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + (\nu+1)^2 = \frac{\nu+1}{6}(2\nu^2+\nu+6\nu+6)$$

$$= \frac{\nu+1}{6}(2\nu^2+7\nu+6) =$$

$\Delta = 49$

$$x_{1,2} = \frac{-7\pm1}{4} \begin{cases} -2 \\ -3/2 \end{cases}$$

$$= \frac{\nu+1}{6}\, 2(\nu+2)\left(\nu+\frac{3}{2}\right) = \frac{(\nu+1)(\nu+2)(2\nu+3)}{6}$$

Άρα ισχύει η (2) για το $\nu+1$

Από μαθ. επαγ. ισχύει η (2) για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$

Άσκηση $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

3) Ανισότητα Bernoulli

Έστω $x \in \mathbb{R}$ με $x > -1$
Τότε $(1+x)^n \geq 1 + nx$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (3)

Απόδειξη με επαγωγή

1º Επαγωγικό Βήμα.

$(1+x)^1 = 1 + x = 1 + 1 \cdot x$
άρα ισχύει (και μάλιστα ως ισότητα)

Γενικό Επαγωγικό Βήμα
Υποθέτουμε ότι η (3) ισχύει για το φυσικό αριθμό
n δηλ. $(1+x)^n \geq 1 + nx$

Εφόσον $x > -1$ έχουμε $1 + x > 0$ και έτσι προκύπτει
$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + x + nx + nx^2 =$$
$$= 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{>0} \geq 1 + (n+1)x$$

Άρα η (3) ισχύει για το $n+1$.
Επομένως ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$

Αν $\nu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
και $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ με $0 \leq \kappa \leq \nu$

Θέτουμε $\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{\kappa!\,(\nu-\kappa)!}$

συνδυασμοί ν ανά κ